**Fórmula de Euler | Cómo elevar a un número complejo, EXPLICADO SIN SERIES DE TAYLOR**

---

e^ix. ¿Pero qué es esta atrocidad? ¿Multiplicar al número e por sí mismo, ix veces? ¡No tiene sentido! Pero entonces, ¿qué significa elevar a un exponente imaginario?

Existe una identidad muy famosa que nos da una respuesta: e^ix = cos(x) + isin(x). Esta es la fórmula de Euler.

Según esta fórmula, e^ix es un número complejo de parte real cos(x) y parte imaginaria sin(x). Es decir que se encuentra en la circunferencia de radio 1 centrada en el origen, o en otras palabras su módulo es 1, y además su ángulo es x radianes. Eso es e^ix.

…eeh, ¿ok?, pero, ¿por qué? ¿Por qué esta fórmula es cierta? ¿Cómo se llegó a ese resultado?

Para responder a esto, muchas personas dicen: “Bueno, e^x se puede expresar como la siguiente serie de potencias”. Bueno, pero, ¿de dónde sale esta serie? Es una “serie de Taylor”, un tópico un poco más avanzado, pero no importa, la gracia es que aquí la x no está en un exponente, sino que tenemos una suma de potencias de x, más fáciles de calcular, por lo que perfectamente podemos poner x un número complejo. Así podemos definir la exponencial compleja, y resulta que si reemplazamos por ix, y separamos los términos reales de los imaginarios, \*casualmente\* la serie real es precisamente la serie de Taylor para el coseno de x, y la serie imaginaria es la del seno. Por eso, e^ix = cos(x) + isin(x). ¿…bam?

Es que-es que... ¿qué? ¿De dónde salieron estas series? “Bueno, pue, son las series de Tay-“ Sí, sí, ¿pero por qué? ¿Por qué estas series son iguales a estas funciones? ¿Qué sentido tiene esto?

¡Todo es muy abstracto, no se entiende nada! Si tan solo hubiera una manera intuitiva de entender y visualizar la exponencial compleja…

Lo bueno, es que la hay, y eso es lo que voy a explicar en este video. ¿Qué representa elevar a un exponente complejo? ¿Qué tiene que ver con las funciones trigonométricas? Y sobre todo, ¿por qué todo esto tiene tanto sentido?

**PARTE 1: LA CONFUSIÓN DE LA EXPONENCIAL – desde exponentes naturales a exponentes complejos**

En un inicio, aprendemos que la exponencial es una multiplicación abreviada. 2^3 representa multiplicar por 2, 3 veces. 4^5 es multiplicar por 4, 5 veces, y en general a^n es multiplicar por a, n veces.

---

Bueno, pero pues, ¿qué hay de 2^-1, o 3^(1/2), o e^ipi? ¿Significa que debo multiplicar por 2, -1 vez? ¿Multiplicar por 3, ½ vez? ¿¿Multiplicar por e, ipi veces??

¡No tiene ningún sentido! La cantidad de veces debería ser un número natural. Y sin embargo, seguramente ya conoces todos esos valores: ½, raíz de 3, y -1. Pero, ¿por qué es así?

Lo que estamos haciendo aquí se conoce en matemáticas como “extender el dominio de una función”

La definición original de la exponencial, aunque solo funciona con exponentes naturales, es un buen comienzo.

---

La exponencial tiene una propiedad muy importante…

…y es que si multiplicamos dos potencias a^n y a^m…

…si la primera representa multiplicar por a, n veces…

…y la segunda, multiplicar m veces…

…entonces en total, estamos multiplicando por a, n + m veces…

…por lo que podemos reescribir esto como a^(n+m).

Es decir, al multiplicar dos exponenciales con la misma base, se suman sus exponentes.

Esta es la propiedad más importante que tiene la exponencial.

Es tan importante, que en vez de usar la definición original, podríamos definirla usando esta propiedad, y decir que:

/\* “Una función f es exponencial si cumple que f(x)f(y) = f(x+y), para todo x e y”\*/

En esta nueva definición, los exponentes no tienen por qué representar una cantidad de veces, así que no tienen por qué ser un número natural.

Pueden ser enteros negativos, fracciones, e incluso números complejos. (// mostrar los mismos ejemplos anteriores)

Pero, ¿cómo exactamente podemos definir los valores que toma la exponencial en esos casos? (// completar con los valores correspondientes)

Para mí, la mejor manera de hacerlo es partir con una recta real, donde ubicamos el 0 y el 2.

Si este 2 lo multiplicamos por 2, obtenemos 2\*2 o 2^2, que es 4.

Si esto lo multiplicamos por 2, obtenemos 2^3, que es 8, y así.

Podemos decir que, cada vez que multiplicamos por 2, el exponente aumenta en 1.

/\* Mostrar “(2^x)\*2^1 = 2^(x+1)”\*/

Y al revés, si ahora dividimos cada potencia por 2, el exponente disminuye en 1.

/\* Mostrar “2^x = 2^(x+1) / 2”, y cambiarla a “2^(x-1) = 2^x / 2” \*/

Ahora, si volvemos al número 2, o 2^1, y lo dividimos por 2…

…según esta regla el exponente disminuye en 1 y llegamos a 2^0, que tendría que ser igual a 1.

Si seguimos dividiendo llegamos a 2^-1, que es ½; 2^-2, que es ¼, y así infinitamente.

Así definimos la exponencial para todos los exponentes enteros, incluyendo el 0 y los negativos.

Esta definición sigue cumpliendo la propiedad esencial de la exponencial.

¿Qué pasa si ahora queremos exponentes decimales? Por ejemplo, ¿cómo definimos 2^(1/2)?

La idea es que se siga aplicando la propiedad de la exponencial…

…así que se debería cumplir que 2^(1/2) \* 2^(1/2) = 2^1.

Entonces, 2^(1/2) debería ser la raíz cuadrada de 2…

…y debería estar entre 2^0 y 2^1.

Podemos usar este nuevo valor para definir 2^(3/2), 2^(5/2), 2^(-1/2), y así.

---

En general, podemos definir 2^(1/n) como el valor que, al elevarlo a n, nos da 2. Es decir, la raíz enésima de 2.

Ahora podemos elevarlo a cualquier exponente natural m, para obtener 2^(m/n), que sería la raíz enésima de 2, elevada a m.

Así es cómo podemos definir los exponentes racionales.

---

Ahora, podemos usar fracciones para aproximar números irracionales…

…y así pasamos a tener todos los exponentes reales.

Dado un x real cualquiera, ahora podemos ubicar 2^x en esta recta real.

---

Ahora que tenemos todos los exponentes reales…

…¿cómo podemos definir los exponentes complejos?

Los números complejos pueden ser muy extraños de entender al inicio.

Así que, para ayudarte a entenderlos, te recomiendo ver el video de Veritasium llamado “Cómo se inventaron los números imaginarios”,

y la serie de videos de Welch Labs, llamada “Los números imaginarios son reales”.

Ambas explican la historia de los números imaginarios, su verdadera razón de ser, y por qué resultan tan útiles.

---

Pero para este video solo nos basta saber lo siguiente:

Los números complejos son sumas entre números reales y números imaginarios, que son simplemente múltiplos reales del número i.

i es la unidad imaginaria con la propiedad de que i^2 = -1.

Los números imaginarios se encuentran en la recta imaginaria, que es perpendicular a la real, y ambas rectas forman el plano complejo.

Esto es importante, porque mientras que los números reales solo nos permiten caminar hacia adelante y hacia atrás en la recta real con una sola dimensión…

…los números complejos nos permiten no solo eso, sino también caminar hacia los lados, en el plano complejo con dos dimensiones.

Y además, los números complejos representan rotaciones.

Si multiplicar por -1 equivale a rotar en 180°,

entonces multiplicar por i se puede pensar como rotar en 90°, porque hacerlo dos veces es lo mismo que rotar en 180°, o sea, i^2 = -1.

En general, multiplicar por cualquier número complejo significa rotar el plano en el ángulo que forma el número con la recta real…

…aunque también estirar o comprimir el plano según su distancia al origen, que se llama “módulo” del número complejo.

---

En resumen, los complejos te permiten moverte hacia los lados, y representan rotaciones en el plano.

Sabiendo ambas cosas, si tuvieras que definir la exponencial compleja, ¿cómo lo harías?

**PARTE 2: LA EXPONENCIAL COMPLEJA definida intuitivamente**

En nuestra recta real de antes, si aumento el exponente avanzo por esta recta real, y al disminuirlo retrocedo.

¿Qué pasa si ahora quiero cambiar la parte imaginaria del exponente?

Lo natural sería moverme hacia los lados.

Si la aumento un poco, debería moverme un poco hacia arriba. Y si la disminuyo, debería moverme hacia abajo.

---

Ahora, ¿qué pasa si quiero cambiar más la parte imaginaria?

Sabemos que cada vez que aumentamos más la parte real del exponente, avanzamos por la recta cada vez más rápido, y que cada vez que la disminuimos, retrocedemos, pero cada vez más lento.

¿Qué pasaría si cambiamos más la parte imaginaria? ¿Nos moveremos más rápido, más lento?

De partida, ¿en qué dirección nos moveremos? Como ahora nos podemos mover en un plano de dos dimensiones, podría cambiar la dirección del movimiento.

Hay tres posibilidades, y aquí va la primera pregunta: ¿hacia dónde se moverá el punto al seguir aumentando la parte imaginaria?

1. Seguirá moviéndose en línea recta
2. Se moverá hacia afuera
3. Se moverá hacia adentro

Recuerda: estamos **extendiendo** la exponencial para tener exponentes complejos. Así que, lo que sea que elijas, debería cumplir esta propiedad esencial.

Pausa el video para pensar en la respuesta.

---

Supongamos que nos movemos un poco, hasta 2^(0.1i).

Como los números complejos representan rotaciones, si multiplicamos este número consigo mismo, su módulo se eleva al cuadrado y su ángulo se duplica…

…obteniendo este número, que sería 2^(0.1i) al cuadrado, que nos da 2^(0.2i).

Podemos seguir multiplicando por 2^(0.1i) para obtener 2^(0.3i), 2^(0.4i), y así.

A medida que aumentamos la parte imaginaria del exponente, este punto va rotando.

Así que la alternativa correcta es la c): el punto se mueve hacia adentro, va rotando alrededor del origen.

---

Aún nos falta saber: ¿cómo va cambiando su módulo y su ángulo a medida que aumenta la parte imaginaria?

Primero el ángulo, porque es más fácil. Hay tres posibilidades. ¿Cómo va cambiando el ángulo?

1. Va creciendo cada vez más rápido
2. Va creciendo cada vez más lento
3. Crece siempre al mismo ritmo

En el experimento anterior, si teníamos que 2^(0.1i) tiene un ángulo, 2^(0.2i) tiene el doble de ese ángulo, 2^(0.3i) tiene el triple, y así.

Por ende, podemos decir que el ángulo es **directamente proporcional** a la parte imaginaria del exponente.

Si tienes una exponencial 2^ix, donde x es un número real…

…entonces el ángulo es directamente proporcional a x.

Esto se puede reescribir como theta = kx, donde k es una constante de proporcionalidad.

Entonces, la alternativa correcta es la c). El ángulo crece siempre al mismo ritmo, el punto rota alrededor del origen a un ritmo constante.

---

Ahora nos falta cómo evoluciona el módulo de este punto.

Tercera pregunta: a medida que aumentamos la parte imaginaria del exponente, ¿el punto:

1. ...se va alejando del origen, recorriendo una espiral hacia afuera?
2. …se va acercando al origen, recorriendo una espiral hacia adentro? O…
3. …se mantiene siempre a la misma distancia, recorriendo una circunferencia?

Esta es más difícil, así que aquí van dos pistas.

Uno, si al aumentar la parte imaginaria la distancia crece, entonces si la disminuyes la distancia debería acortarse, porque las propiedades de la exponencial obligan a que pase eso.

Y viceversa: si al aumentar la parte imaginaria la distancia se acorta, al disminuirla la distancia debe crecer.

Una tercera opción es que se mantenga siempre constante, sin importar si aumenta o disminuye la parte imaginaria.

Y la segunda pista, más importante aún, es que los números i y -i son simétricos respecto de la real.

En general, decimos que los números a+bi y a-bi, que son simétricos respecto de la recta real, son conjugados, o uno es conjugado del otro, y se denota así: (// mostrar la notación del conjugado)

Esto es importante, porque resulta que hay una simetría en el eje imaginario que no tiene el eje real.

Puedes intercambiar el eje imaginario positivo con el negativo, conjugando todos los números, y muchas cosas seguirían igual, y eso se evidencia en las propiedades de los conjugados. (// Mostrar propiedades: “Siendo más técnicos, hay un “automorfismo””)

Esto no pasa con el eje real, porque muchas reglas se romperían si intercambiamos los positivos con los negativos.

Volviendo a nuestro problema, lo importante es que, si aumentas la parte imaginaria, este punto sube…

…pero si la disminuyes en la misma cantidad, como hay una simetría en la parte imaginaria, el punto debería bajar en la misma cantidad.

Ambos valores deberían permanecer siempre simétricos, siempre deberían ser conjugados.

Con estas pistas, ¿qué crees que pasa con la distancia del punto al origen?

Pues, si siempre hay una simetría respecto de la recta real, entonces en ambos casos, cuando aumentas la parte imaginaria y cuando la disminuyes, debería pasar lo mismo.

En ambos casos, o aumenta el módulo, o disminuye, o se queda constante.

Sin embargo, según la primera pista, si al aumentar la parte imaginaria del exponente aumenta el módulo, entonces al disminuirla debería disminuir, y viceversa.

Ambas opciones romperían la simetría de antes.

La única opción viable es que el módulo se mantenga constante siempre.

Por lo tanto, la alternativa correcta es la c):

Al cambiar la parte imaginaria, nuestro punto va rotando alrededor del origen, a lo largo de la circunferencia de radio 1.

---

Sabiendo eso, y que el ángulo theta de 2^ix es proporcional a x, o sea igual a kx…

…podemos encontrar la parte real e imaginaria de este número, usando funciones trigonométricas.

Como está en la circunferencia unitaria, su parte real es coseno de theta, y su parte imaginaria es seno de theta. Si theta es igual a kx, entonces, 2^ix es igual a cos(kx) + isin(kx).

---

Ahora, tómate un momento para apreciar lo mucho que se parece esto a la fórmula de Euler.

/\* Comparar 2^ix = cos(kx) + isin(kx) con e^ix = cos(x) + isin(x) \*

Nos falta muy poco para llegar allá, pero tenemos que ver ciertos asuntos: ¿qué es la constante k, qué es el número e y por qué no hay una k en la fórmula de Euler?

Estos dos últimos temas los veremos más adelante, ahora concentrémonos en la constante k. ¿Cuál es su valor?

---

Esta constante está muy relacionada con la velocidad a la que se mueve este punto al cambiar x, así que analicemos esto.

Cuando nos paramos en el punto 2^0 y cambiamos un poco el exponente, nuestro punto se mueve a cierta velocidad.

Si multiplicamos todo por 2 para llegar a 2^1, el punto se mueve al doble de la velocidad.

Si volvemos a multiplicar por 2 para llegar a 2^2, se mueve 4 veces más rápido que antes, o 2^2 veces más rápido.

En general, si nos paramos en el punto 2^alfa, nos movemos 2^alfa veces más rápido que cuando estábamos en el punto 2^0.

---

Entonces, la velocidad del punto, es directamente proporcional a nuestra posición.

En otras palabras, es igual a la posición por una constante de proporcionalidad k.

/\* Mostrar v(x) = k\*p(x) \*/

Según esta expresión, cuando x es 0, es decir estamos en la posición 2^0, que es igual a 1, la velocidad de nuestro punto es k.

Aquí, si cambiamos un poco el exponente, digamos una cantidad omega, el punto se mueve aproximadamente k\*omega.

En otras palabras, 2^omega es aproximadamente igual a 1 + k\*omega.

Aquí podemos despejar k restando 1 a ambos lados, y dividiendo por omega.

Entonces, para aproximar k, puedes tomar una calculadora y calcular 2 elevado a un valor muy pequeño, digamos 0,001, lo que nos da este valor.

Si le restamos 1, y dividimos por 0,001, obtenemos que k es aproximadamente 0,69. (// nice)

En este ejemplo, omega era un número real, pero perfectamente podría ser un número complejo: podríamos movernos un poco en cualquier dirección en este plano.

Si omega es imaginario, volvemos a lo de rotar alrededor de la circunferencia. En este caso, nos desplazamos en un arco k\*omega.

Con este arco, podemos encontrar el ángulo que forma este punto.

Para eso, vamos a usar radianes.

Recordemos que los radianes son una unidad de medida de ángulos que compara directamente el arco subtendido por cierto ángulo, con el radio de la circunferencia.

Los radianes están diseñados para que, en una circunferencia de radio 1, si el arco mide x, el ángulo también mida x, pero en radianes.

Así, usando esta unidad de medida, si el arco mide k\*omega, entonces el ángulo también mide k\*omega radianes.

Pero antes ya habíamos encontrado que el ángulo era directamente proporcional a la parte imaginaria del exponente.

Esa constante de proporcionalidad del ángulo, resulta ser precisamente la constante de la rapidez de cambio de la exponencial…

…por lo que acabamos de resolver el misterio de cuánto valía k en esta expresión (//mostrar 2^ix = cos(kx) + isin(kx)): alrededor de 0,69.

Antes de seguir avanzando, quiero mencionar algunos detalles importantes sobre la exponencial compleja.

Primero, como este punto va rotando alrededor del origen, en algún momento va a pasar por el eje real negativo.

Es decir, 2, un número positivo, elevado a i por algún x, nos va a dar -1, un número negativo. Cuando estábamos trabajando con exponentes reales, esto era impensable.

Podemos calcular el x para el cual esto ocurre. La exponencial es igual a -1 cuando el ángulo es igual a pi radianes.

/\*Mostrar en pantalla: “En realidad pi es solo uno de los posibles ángulos. Hay infinitos ángulos de la forma pi + 2npi, n entero, que cumplen esto” \*/

Si la exponencial es 2^ix, el ángulo es k\*x.

Entonces, kx = pi, por lo que x debe ser pi/k.

Con los valores de pi y k, esto es alrededor de 4,53.

Es decir, 2^(ipi/k), que es alrededor de 2^4,53i, es igual a -1.

También podemos calcular el x para el cual el punto da una vuelta completa alrededor del origen.

Eso ocurre cuando el ángulo, kx, es igual a 2pi radianes, o sea cuando x = 2pi/k, que es alrededor de 9,06.

Cada vez que le sumamos el valor 2pi\*i / k al exponente, sin importar cuál sea, la exponencial da una vuelta completa y termina en el mismo lugar de antes.

Esto significa que, contrario a todo lo que se podía pensar antes, la exponencial \*es\* una función periódica, y su periodo es el valor imaginario 2pi\*i / k.

Hasta ahora solo vimos la exponencial real y la exponencial imaginaria. Pero, ¿qué pasa si el exponente es un complejo cualquiera?

Por propiedades de la exponencial, esto se puede descomponer en el producto entre una exponencial real y una imaginaria.

Como conocemos bien ambas exponenciales, podemos ubicar cualquier punto en este plano.

Por ejemplo, 2^(1+i), que se descompone como 2^1 \* 2^i.

Para encontrarlo, podemos tomar el punto 2^i en esta circunferencia, y multiplicarlo por 2.

(// Trazar una línea entre 2^i y 2^(1+i)).

Si volvemos a multiplicar por 2, encontramos 2^(2+i).

En general, podemos multiplicar 2^i por cualquier potencia real de 2, y así obtenemos todos los puntos en esta semirrecta.

Esta es solo una copia de la semirrecta real positiva, pero multiplicada por 2^i, que la rota hasta esta posición.

Podemos hacer lo mismo con otro punto, como 2^2i.

Si lo multiplicamos por 2, llegamos a 2^(1+2i). Si volvemos a multiplicar por 2, obtenemos 2^(2+2i).

Multiplicando por cualquier potencia real de 2, obtenemos esta otra semirrecta.

---

En general, todos los puntos que estén en esta circunferencia, podemos multiplicarlos por 2, y obtenemos esta nueva circunferencia de puntos.

Todos estos puntos tienen un exponente de parte real 1, así que la circunferencia tiene radio 2^1.

Si volvemos a multiplicar por 2, obtenemos esta otra circunferencia de radio 2^2.

En general, podemos multiplicarlos por cualquier potencia real. Así obtenemos varias circunferencias, y cada punto traza una semirrecta.

Todo este conjunto de círculos y líneas rectas nos da una especie de mapa por el que podemos navegar y ubicar todas las potencias complejas de 2.

Recuerda que una exponencial compleja se puede factorizar en una exponencial real, la cual nos permite acercarnos o alejarnos del origen…

…y una exponencial imaginaria, que nos hace rotar alrededor del origen.

De esa manera, si nos paramos en un punto cualquiera…

…modificar la parte real de su exponente significa moverse hacia adelante o hacia atrás en este mapa, o sea alejarse o acercarse al origen, cambiar la magnitud.

En cambio, modificar la parte imaginaria del exponente significa moverse hacia los lados, o sea rotar alrededor del origen, cambiar el ángulo.

Este es el significado de la exponencial compleja.

Con todo lo que llevamos hasta ahora, hemos dado un paso muy importante para entender la fórmula de Euler.

Pero todavía nos faltan entender algunas cosas, y para eso tenemos que ir un paso más allá y definir de manera más rigurosa la exponencial.

**PARTE 3: LA EXPONENCIAL COMPLEJA definida más rigurosamente**

¿Recuerdas cómo definimos la exponencial real?

Partimos dividiendo el tramo entre 2^0 y 2^1 en varias partes para definir las potencias con exponentes racionales.

Si dividimos en cada vez más trozos, podemos aproximar cualquier exponente irracional, y así tener todos los exponentes reales.

Básicamente, estamos jugando con la idea de un límite al infinito, y esta idea nos va a servir para definir definitivamente la exponencial real.

(// ¿Reformular esto?)

Desde el punto 2^0, vamos a aumentar el exponente en una cantidad infinitamente pequeña omega. Entonces, el valor de la exponencial aumenta en una cantidad k\*omega. Por lo tanto:

2^omega = 1 + k\*omega

Si queremos llegar al valor 2^2omega, debemos elevar ambos lados de la expresión al cuadrado.

// 2^(2\*omega) = (1 + k\*omega)^2

En general, si queremos aumentar n veces el exponente en una cantidad omega, debemos tomar la expresión y elevar ambos lados a n.

// 2^(n\*omega) = (1 + k\*omega)^n

Como omega es un número infinitamente pequeño, todo lo anterior debería seguir siendo muy cercano a 2^0, que es 1.

Si queremos que deje de ser un valor cercano a 1, entonces n debería ser un número infinitamente grande. La idea es que, si damos una cantidad muy grande de pasos pequeños, deberíamos poder salir de donde estamos.

Sin embargo, no cualquier cantidad infinitamente grande nos sirve. Debemos escoger un n específico. Podemos escoger uno tal que el exponente, n\*omega, sea igual a 1.

Ahora ojo, que n aquí debería ser un número natural, porque representa una cantidad de pasos.

Entonces, en la expresión n\*omega = 1, no es tan fácil como llegar y despejar n = 1/omega, porque si omega es cualquier valor, entonces n no es necesariamente un entero.

Lo mejor aquí es despejar omega = 1/n, y fijar que n sea un entero infinitamente grande.

Entonces, en las expresiones anteriores, si reemplazamos omega por 1/n, obtenemos que 2^(1/n) es igual a 1 + k/n…

y si elevamos ambos lados a n, obtenemos que 2 = (1 + k/n)^n.

Esto lo podemos expresar más formalmente como un límite cuando n tiende a infinito.

/\* mostrar 2 = lím\_{n -> inf} (1 + k/n)^n \*/

Ahora, si cambiamos el n y escogemos uno tal que n\*omega sea no 1, sino cualquier valor x…

…podemos despejar omega = x/n y reemplazar en la expresión, llegando a que 2^(x/n) = 1 + kx/n…

y si elevamos ambos lados a n, obtenemos:

2^x = lím\_{n -> inf} (1 + kx/n)^n

---

Puede que parezca más complicado de lo que debería, pero en realidad acabamos de simplificar la exponencial:

la estamos expresando mediante una combinación de sumas y multiplicaciones, aunque sean infinitas.

Esto nos permite definirla más formalmente para todo valor real de x, pero más importante aún, también podemos poner un x complejo, porque sabemos cómo sumar y multiplicar números complejos.

Esta definición más rigurosa es la que vamos a usar para la exponencial real, y la compleja.

Pero hay un problema: no sabemos exactamente qué es k.

En la sección anterior, aproximamos el valor de k.

Eso era suficiente por el momento, porque solo estábamos explicando la exponencial de manera muy superficial.

Pero si ahora queremos ser más rigurosos, necesitamos conocer el valor exacto de k.

---

Recuerda que el límite representa partir desde 1, dar un pequeño paso kx/n, y elevar todo a la n.

Este pequeño paso tiene un peso, y es el producto kx.

Hasta ahora hemos cambiado solo x, y esto influye exponencialmente en el punto donde terminamos después de elevar todo a la n.

Pero, ¿qué pasa si ahora cambiamos la constante k?

Por ahora, digamos que x = 1. Entonces tenemos simplemente que 2 = este límite. Ahora el peso de cada paso es simplemente k.

Si cambiamos el valor de k, entonces el valor del límite cambia, y deja de ser el número 2.

¿De qué manera afecta el valor de k al resultado final?

Originalmente, cambiar el valor de x, sin cambiar k, afectaba exponencialmente el valor del límite, que era 2^x.

Pero como k y x se están multiplicando directamente en el límite…

…podemos perfectamente intercambiar sus roles…

…y si ahora cambiamos el valor de k, sin cambiar x…

…entonces el límite también debería cambiar exponencialmente en función de k…

…por lo que el resultado de este límite debería ser una exponencial B^k, donde B es una base desconocida.

Entonces, si elegimos un k tal que este límite sea igual a 2, entonces B^k = 2.

Permíteme introducir ahora la función “logaritmo”, que es básicamente la inversa de la exponencial.

La inversa de la exponencial a^x, es el logaritmo en base a de x, y se denota así.

Como es la función inversa, componer ambas funciones nos debería retornar la identidad. Entonces:

// log\_{a}(a^x) = x

Volviendo a B^k = 2, si a ambos lados aplicamos logaritmo en base B, el lado izquierdo se simplifica, y nos queda entonces que k es el logaritmo en base B de 2.

Esta es la expresión que necesitábamos encontrar para k.

Ahora solo necesitamos encontrar la base B, y tenemos todo lo necesario para calcular k.

Sabemos que B^k es igual a este límite.

Si ahora sustituimos k = 1, entonces nuestra base B es igual al límite, cuando n tiende a infinito, de 1 + 1/n, todo a la n.